5. *Волкова С.Ю.* Введение нормальных связностей на S-распределении // Там же. Вып. 36. 2005. С. 18—25.

6. *Столяров А.В.* Двойственные нормальные связности на регулярной неголономной гиперполосе // Изв. НАНИ ЧР (физ.-мат. науки). 1996. №6. С. 9—14.

S. Volkova

PLANE FIELDS PARALLEL IN NORMAL CONNECTIONS OF S-DISTRIBUTION

Analytical and geometrical signs of fields of plane parallel in normal connections of S-distributions are found out.

УДК 514.75

С.Ю. Волкова, Ю.И. Попов

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

ПОЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ОХВАЧЕННЫХ ОБЪЕКТОВ КООСНАЩЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Приведено задание нормально s-кооснащенной гиперполосы ${}^sH_m$ в репере 1-го порядка R_1 и доказана теорема существования гиперполосы ${}^sH_m$. Построены поля плоскостей Нордена — Тимофеева [4] и поля геометрических объектов в дифференциальных окрестностях 2-го и 3-го порядков гиперполосы ${}^sH_m$.

Ключевые слова: регулярная гиперполоса, форма, многообразие, нормаль, геометрический объект, квазитензор, тензор, дифференциальное уравнение.

В данной статье используется следующая схема индексов:

$$i,j,k=\overline{1,m};\ I,J,K=\overline{0,n};\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1};\ s=m-r;$$

$$\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{m+1,n};\ p,q,r,s,t=\overline{1,s};\ a,b,c,d,e,f=\overline{s+1,m}.$$

§ 1. Задание нормально s-кооснащенной регулярной гиперполосы ${}^sH_m$ в репере первого порядка

Рассмотрим регулярную гиперполосу H_m [1; 2], которая оснащена полем плоскостей N_{n-r} так, что в каждой точке $A \in V_m$ выполняются соотношения

$$N_{n-m}(A) \subset N_{n-r}(A), \quad \Lambda_s(A_0) = T_m(A_0) \cap N_{n-r}(A). \quad (1.1)$$

Определение. *Регулярную гиперполосу H_m, оснащенную полем плоскостей N_{n-r}, удовлетворяющих условиям* (1.1)*, назовем нормально s-кооснащенной регулярной гиперполосой и обозначим символом ${}^sH_m$.*

Присоединим к гиперполосе ${}^sH_m$ точечный репер $\{A_{\bar{J}}\}$ следующим образом: $A_0 \equiv A \in V_m$, точки $\{A_a\}$ поместим в касательную плоскость $T_m(A_0)$ базисной поверхности V_m, точки $\{A_p\}$ — в оснащающую плоскость $\Lambda_s(A_0)$; точки $\{A_\alpha\}$ — в характеристику $X_{n-m-1}(A_0)$ гиперполосы ${}^sH_m$, точку A_n выбираем произвольно, но так, чтобы она с остальными точками образовывала репер $\{A_{\bar{J}}\}$. Выбранный таким образом репер $\{A_{\bar{J}}\}$ является репером 1-го порядка. В этом репере базисная поверхность V_m гиперполосы ${}^sH_m$ задается уравнениями

$$\omega_0^n = 0, \ \omega_0^\alpha = 0. \quad (1.2)$$

Так как $\{A_\alpha\} \subset X_{n-m-1}(A_0)$, то согласно [2]

$$\omega_\alpha^n = 0. \quad (1.3)$$

Примем формы $\omega_0^i = \{\omega_0^p, \omega_0^a\}$ за базисные формы гиперполосы ${}^sH_m$ и запишем разложение остальных главных форм по этим базисным:

$$\omega^n_p = a^n_{pq}\omega^q_0 + a^n_{pb}\omega^b_0, \quad \omega^n_a = a^n_{ab}\omega^b_0 + a^n_{aq}\omega^q_0,$$

$$\omega^\alpha_p = a^\alpha_{pq}\omega^q_0 + a^\alpha_{pb}\omega^b_0, \quad \omega^\alpha_a = a^\alpha_{ab}\omega^b_0 + a^\alpha_{aq}\omega^q_0, \qquad (1.4)$$

$$\omega^a_p = \lambda^a_{pq}\omega^q_0 + \lambda^a_{pb}\omega^b_0,\ \omega^p_\alpha = \lambda^p_{\alpha q}\omega^q_0 + \lambda^p_{\alpha b}\omega^b_0,\ \omega^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha q}\omega^q_0 + \lambda^a_{\alpha b}\omega^b_0,$$

где

$$a^n_{[pq]} = 0, \quad a^n_{[ab]} = 0, \quad a^\alpha_{[pq]} = 0, \quad a^\alpha_{[ab]} = 0; \qquad (1.5)$$

$$\lambda^t_{\alpha[p}a^n_{t]q} = 0, \ \lambda^c_{\alpha[b}a^n_{c]d} = 0; \qquad (1.6)$$

$$\nabla a^n_{pi} + a^n_{pi}\,\omega^0_0 = a^n_{pij}\,\omega^j_0, \quad \nabla a^n_{ai} + a^n_{ai}\,\omega^0_0 = a^n_{aij}\,\omega^j_0, \qquad (1.7)$$

$$\nabla a^\alpha_{ai} + a^\alpha_{ai}\,\omega^0_0 + a^n_{ai}\,\omega^\alpha_n = a^\alpha_{aij}\,\omega^j_0, \qquad (1.8)$$

$$\nabla a^\alpha_{pi} + a^\alpha_{pi}\,\omega^0_0 + a^n_{pi}\,\omega^\alpha_n = a^\alpha_{pij}\,\omega^j_0, \qquad (1.9)$$

$$\nabla\lambda^a_{pi} + \lambda^a_{pi}\,\omega^0_0 + a^n_{pi}\,\omega^a_n - \delta^a_i\,\omega^0_p = \lambda^a_{pij}\,\omega^j_0, \qquad (1.10)$$

$$\nabla\lambda^p_{\alpha i} + \lambda^p_{\alpha i}\,\omega^0_0 - \delta^p_i\,\omega^0_\alpha = \lambda^p_{\alpha ij}\,\omega^j_0, \qquad (1.11)$$

$$\nabla\lambda^a_{\alpha i} + \lambda^a_{\alpha i}\,\omega^0_0 - \delta^a_i\,\omega^0_\alpha = \lambda^a_{\alpha ij}\,\omega^j_0\ . \qquad (1.12)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *В репере 1-го порядка* R_1 *гиперполоса* ${}^sH_m \subset P_n$ *задается уравнениями* (1.2 — 1.4, 1.7 — 1.12)*, причем функции удовлетворяют соотношениям* (1.5), (1.6).

Для тензоров a^n_{pq} и a^n_{ab} введем соответственно обратные им тензоры a^{pq}_n и a^{ab}_n :

$$a^n_{pq}a^{qt}_n = \delta^t_p\,,\ \nabla a^{qt}_n - a^{qt}_n(\omega^0_0 + \omega^n_n) \equiv 0\,, \qquad (1.13)$$

$$a^n_{ab}a^{bc}_n = \delta^c_a\,,\ \nabla a^{bc}_n - a^{bc}_n(\omega^0_0 + \omega^n_n) \equiv 0\,.$$

§ 2. Теорема существования гиперполосы ${}^s\mathrm{H}_m$

Теорема 2. *Нормально s-кооснащенная регулярная гиперполоса* ${}^sH_m \subset P_n$ *существует и определяется с произволом* $2(n-m-1) + rs + 1$ *функций m аргументов.*

Доказательство. Систему уравнений (1.4) представим в виде:

$$\omega_i^n = a_{ij}^n \omega_0^j, \quad \omega_i^\alpha = a_{ij}^\alpha \omega_0^j, \quad \omega_\alpha^i = \lambda_{\alpha j}^i \omega_0^j, \quad \omega_p^a = \lambda_{pj}^a \omega_0^j. \quad (2.1)$$

Чистое замыкание системы (2.1) имеет вид:

$$\Delta a_{ij}^n \wedge \omega_0^j = 0, \Delta a_{ij}^\alpha \wedge \omega_0^j = 0, \Delta \lambda_{\alpha j}^i \wedge \omega_0^j = 0, \Delta \lambda_{pj}^a \wedge \omega_0^j = 0. \quad (2.2)$$

Введем обозначения $A = rs, \quad B = 1 + 2(n - m - 1)$. Следуя работе [3], найдем характеры системы (2.2):

$$\begin{aligned} &s_1 = A + mB, \quad s_2 = A + (m-1)B, \quad s_3 = A + (m-2)B, \ldots, \\ &s_{m-1} = A + 2B, \quad s_m = A + B. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Учитывая (2.3), подсчитаем число Картана Q системы уравнений (2.2):

$$\begin{aligned} Q &= s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \ldots + (m-1)s_{m-1} + ms_m = \\ &= A(1+2+3+\ldots+m) + B(1\cdot m + 2(m-1) + 3(m-2) + \ldots + (m-1)\cdot 2 + m\cdot 1) = \\ &= \frac{m\cdot(m+1)}{2}A + \frac{m\cdot(m+1)\cdot(m+2)}{6}B. \end{aligned}$$

Разрешим систему (2.2) по лемме Картана

$$\Delta a_{ij}^n = a_{ijk}^n \omega_0^k, \quad \Delta a_{ij}^\alpha = a_{ijk}^\alpha \omega_0^k, \quad \Delta \lambda_{\alpha j}^i = \lambda_{\alpha jk}^i \omega_0^k, \quad \Delta \lambda_{pj}^a = \lambda_{pjk}^a \omega_0^k, \quad (2.4)$$

и найдем число N линейно независимых функций, стоящих в правых частях системы (2.4):

$$N = \frac{m\cdot(m+1)}{2}A + \frac{m\cdot(m+1)\cdot(m+2)}{6}B.$$

Итак, $Q = N$, то есть данная система (2.1) находится в инволюции. Следовательно, в пространстве P_n гиперполоса ${}^sH_m$ существует с произволом $[2(n-m-1)+rs+1]$ функций от m аргументов.

§ 3. Поле плоскостей Нордена — Тимофеева гиперполосы ${}^s\mathbf{H}_m$

1. Поле нормалей 1-го рода N_{n-m} и поле плоскостей Λ_s определяют на базисной поверхности V_m гиперполосы ${}^sH_m$ поле $(n-r)$-плоскостей $N_{n-r} = [N_{n-m}, \Lambda_s]$ (поле N-плоскостей).

Относительно локального репера $R_1(N)$ уравнения, определяющие плоскость $N(A_0)$ поля N-плоскостей, имеют вид:

$$x^a = 0\ . \tag{3.1}$$

При смещении точки A_0 вдоль произвольной кривой

$$\omega_0^{\hat{\alpha}} = 0, \quad \omega_0^i = \rho^i \theta, \quad d\theta = \theta \wedge \theta_1, \tag{3.2}$$

лежащей на базисной поверхности V_m гиперполосы ${}^sH_m$, координаты точек фокального многообразия N-плоскости удовлетворяют уравнениям

$$(\delta_i^a x^0 + \lambda_{pi}^a x^p + \lambda_{\alpha i}^a x^\alpha + a_{ni}^a x^n)\rho^i = 0, \quad x^a = 0\ (\rho^{\hat{\alpha}} = 0). \tag{3.3}$$

Пусть квазитензор $\{ v_a^p \}$ задает произвольную инвариантную ТΛ-нормаль 1-го рода v_r (v-плоскость). При смещении точки A_0 вдоль кривых

$$\omega_0^{\hat{\alpha}} = 0, \quad \rho^p - v_a^p \rho^a = 0, \tag{3.4}$$

принадлежащих полю v-плоскостей, система уравнений (3.3) примет вид:

$$\begin{cases} x^a = 0\ (\rho^\alpha = 0), \\ [\,\delta_b^a x^o + \left(\lambda_{\alpha b}^a + \lambda_{\alpha p}^a v_b^p\right) x^\alpha + \left(\lambda_{pb}^a + \lambda_{pq}^a v_b^q\right) x^p + \\ \qquad + \left(a_{nb}^a + a_{np}^a v_b^p\right) x^n\,]\,\rho^b = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Так как не все ρ^b равны нулю, то из (3.4) следует:

$$\begin{cases} x^a = 0, \\ det\left\| \delta_b^a x^o + \left(\lambda_{\alpha b}^a + \lambda_{\alpha p}^a v_b^p\right) x^\alpha + \left(\lambda_{pb}^a + \lambda_{pq}^a v_b^q\right) x^p + \right. \\ \qquad \left. + \left(a_{nb}^a + a_{np}^a v_b^p\right) x^n \right\| = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Уравнения (3.5) в общем случае определяют алгебраическое многообразие размерности (n–r–1) порядка r, которое обозначим $\Phi_{n-r-1}(N, v)$. Это многообразие лежит в N-плоскости.

Соответствующая Λ-плоскость пересекает многообразие $\Phi_{n-r-1}(N,v)$ по алгебраическому многообразию $\Phi_{s-1}(\Lambda,v)$ порядка r и размерности $(s-1)$:

$$\begin{cases} x^{a}=0, x^{\hat{a}}=0, \\ det\left\| \delta_{b}^{a}x^{o}+\left(\lambda_{pb}^{a}+\lambda_{pq}^{a}v_{b}^{q}\right)x^{p}\right\|=0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Линейная поляра точки A_0 относительно многообразия (3.6) есть плоскость $E_{s-1}(A_0)\subset\Lambda_s(A_0)$, которая задается уравнениями:

$$x^{a}=0,\ x^{\hat{a}}=0,\ x^{o}-\varepsilon_{p}^{o}x^{p}=0, \tag{3.7}$$

где

$$\varepsilon_{p}^{o}=-\frac{1}{s}(\lambda_{pa}^{a}+v_{a}^{q}\lambda_{pq}^{a}),\ \nabla\varepsilon_{p}^{o}+\omega_{p}^{o}=\varepsilon_{pi}^{o}\omega_{o}^{i}. \tag{3.8}$$

Таким образом, поле квазитензора $\{\varepsilon_{p}^{o}\}$, определяемое уравнениями (3.8), задает поле TΛ-виртуальных нормалей 2-го рода, соответствующих полю TΛ-виртуальных нормалей 1-го рода $v_r\ \{v_{a}^{q}\}$ в проективитете Бомпьяни — Пантази (3.8).

2. С другой стороны, поле внутренних инвариантных нормалей 1-го рода N_{n-m} и поле v-плоскостей порождают на базисной поверхности V_m гиперполосы поле внутренних инвариантных $(n-s)$ плоскостей Ω_{n-s}(поле Ω-плоскостей), где $\Omega_{n-s}(A_0)=[N_{n-m}(A_0),v_r(A_0)]$. Конечные уравнения плоскости $\Omega_{n-s}(A_0)$ (нормаль 1-го рода соответствующей Λ-плоскости) имеют вид: $x^{p}-v_{a}^{p}x^{a}=0$.

Аналогично (п. 1) находим, что система уравнений

$$\begin{cases} x^{p}=v_{a}^{p}x^{a}, \\ det\left\|\delta_{q}^{p}x^{o}+\left(\lambda_{aq}^{p}-v_{b}^{p}v_{a}^{t}\lambda_{tq}^{b}\right)x^{a}+\left(\lambda_{\alpha q}^{p}-v_{b}^{p}v_{\alpha}^{t}\lambda_{tq}^{b}\right)x^{\alpha}+\right. \\ \qquad \left.+\left(a_{nq}^{p}-a_{nq}^{b}v_{b}^{p}\right)x^{n}\right\|=0 \end{cases} \tag{3.9}$$

определяет фокальное многообразие $\Psi_{n\text{-}s\text{-}1}(\Omega,\Lambda)$, соответствующее смещениям точки A_0 по кривым, принадлежащим полю Λ-плоскостей. В общем случае это алгебраическое многообразие размерности $(n-s-1)$ порядка s.

Многообразие $\Psi_{n\text{-}s\text{-}1}(\Omega,\Lambda)$ лежит в Ω-плоскости и пересекается с соответствующей v-плоскостью по алгебраическому многообразию $\Psi_{r\text{-}1}(v,\Lambda)$ порядка s и размерности $r-1$:

$$\begin{cases} x^p = v_a^p x^a, x^{\hat{a}} = 0, \\ \det\left\| \delta_q^p x^o + (\lambda_{aq}^p - v_b^p v_a^t \lambda_{tq}^b) x^a \right\| = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Таким образом, в каждой v-плоскости некоторого пучка $T\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода, определяемой квазитензором $\{ v_a^p \}$, уравнения (3.10) задают фокальное многообразие $\Psi_{r\text{-}1}(v,\Lambda)$, соответствующее смещениям точки A_0 по кривым, принадлежащим полю Λ-плоскостей. Линейная поляра точки A_0 относительно многообразия $\Psi_{r\text{-}1}(v, \Lambda)$ есть $(r-1)$-плоскость $\rho \subset v_s(A_0)$, которая задается конечными уравнениями:

$$x^{\hat{a}} = 0, \;\; x^p - v_a^p x^a = 0, \;\; x^o - \rho_a^o x^a = 0, \tag{3.11}$$

где

$$\rho_a^o = -\frac{1}{r}(\lambda_{ap}^p - v_b^p v_a^t \lambda_{tp}^b). \tag{3.12}$$

Плоскость $\varphi_{m\text{-}1}(A_0)$, натянутая на линейные поляры точки A_0 относительно фокальных многообразий $\Phi_{s\text{-}1}(\Lambda,v)$ (3.6) и $\Psi_{r\text{-}1}(v,\Lambda)$ (3.10), имеет вид:

$$y^o - \varphi_i^o y^i = 0, \;\; y^{\hat{a}} = 0, \tag{3.13}$$

где

$$\varphi_a^o = \rho_a^o - \varepsilon_p^o v_a^p, \;\; \varphi_p^o = \varepsilon_p^o.$$

Теорема 3. *Поле ТΛ-виртуальных нормалей 1-го рода* $v_r\{v_a^p\}$ *индуцирует поле плоскостей Нордена — Тимофеева* (3.13) *— поле нормалей 2-го рода регулярной гиперполосы* ${}^sH_m$*. Порядок дифференциальной окрестности, в которой внутренним образом определено поле Нордена — Тимофеева [4], на единицу выше порядка дифференциальной окрестности квазитензора* $\{v_a^p\}$.

3. Нормаль 1-го рода N_{n-m} пересекает многообразие $\Phi_{n-r-1}(N, v)$ (3.5) по алгебраическому многообразию $\Phi_{n-m-1}(N, v)$ размерности $(n-m-1)$ порядка r:

$$\begin{cases} x^i = 0, \\ det\left\| \delta_b^a x^o + \left(\lambda_{\alpha b}^a + \lambda_{\alpha p}^a v_b^p\right)x^\alpha + \left(a_{nb}^a + a_{np}^a v_b^p\right)x^n \right\| = 0, \end{cases} \tag{3.14}$$

а многообразие $\Psi_{n-s-1}(\Omega, \Lambda)$ (3.9) по алгебраическому многообразию $\Psi_{n-s-1}(\mathrm{N}, \Lambda)$ размерности $(n-s-1)$ порядка s:

$$\begin{cases} x^i = 0, \\ \det\left\| \delta_q^p x^o + \left(\lambda_{\alpha q}^p - \lambda_{\alpha q}^a v_a^p\right)x^\alpha + \left(a_{nq}^p - a_{nq}^a v_a^p\right)x^n \right\| = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Уравнения линейных поляр точки A_0 относительно многообразий (3.14), (3.15) представим соответственно в виде:

$$x^i = 0,\ x^o - \varepsilon_{\hat\alpha}^o x^{\hat\alpha} = 0;\ x^i = 0,\ x^o - \rho_{\hat\alpha}^o x^{\hat\alpha} = 0. \tag{3.16}$$

Уравнения (3.16) задают соответственно $(n-m-1)$-мерные плоскости $\mathrm{E}_{n-m-1}(A_0)$ и $\rho_{n-m-1}(A_0)$, принадлежащие нормали 1-го рода $\mathrm{N}_{n-m}(A_0)$ гиперполосы ${}^s\mathrm{H}_m$ и не проходящие через точку A_0, то есть они являются оснащающими плоскостями Картана гиперполосы ${}^sH_m$. В общем случае плоскости $\mathrm{E}_{n-m-1}(A_0)$ и $\rho_{n-m-1}(A_0)$ (3.16) различны и поэтому образуют пучок плоскостей Картана гиперполосы ${}^sH_m$, осью которого является плоскость $\widehat{E}_{n-m-2}(A_0)$:

$$x^i = 0, \quad x^o - \varepsilon^o_{\hat{\alpha}} x^{\hat{\alpha}} = 0, \quad x^o - \rho^o_{\hat{\alpha}} x^{\hat{\alpha}} = 0. \qquad (3.17)$$

Отсюда следует

Теорема 4. *Каждая ТΛ-виртуальная нормаль 1-го рода $v_r\{v^p_a\}$ порождает в нормали 1-го рода $N_{n-m}(A_0)$ гиперполосы ${}^sH_m$ пучок плоскостей Картана, осью которого является плоскость $\widehat{E}_{n-m-2}(A_0)$* (3.17).

§ 5. Построение геометрических объектов гиперполосы ${}^s\mathrm{H}_m$ в окрестностях 2-го и 3-го порядков

В этом параграфе построим поля геометрических объектов гиперполосы ${}^sH_m$ во второй и третьей дифференциальных окрестностях образующего элемента гиперполосы.

Следуя работе [2], в окрестности 2-го порядка элемента (A_0, τ^n) гиперполосы ${}^sH_m$ введем симметрические тензоры $c^{ab}_\alpha, c^\alpha_{ab}$ и $c^{pq}_\alpha, c^\alpha_{pq}$, аполярные тензорам a^n_{ab}, a^{ab}_n и a^n_{pq}, a^{pq}_n:

$$c^{ab}_\alpha = \lambda^{ab}_\alpha - \Lambda^o_\alpha a^{ab}_n, \quad c^{pq}_\alpha = \lambda^{pq}_\alpha - \Lambda^o_\alpha a^{pq}_n, \qquad (4.1)$$

$$c^\alpha_{ab} = \lambda^\alpha_{ab} - \Lambda^\alpha_n a^n_{ab}, \quad c^\alpha_{pq} = \lambda^\alpha_{pq} - \Lambda^\alpha_n a^n_{pq}, \qquad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} &\nabla c^{ab}_\alpha - c^{ab}_\alpha \omega^n_n \equiv 0, \quad \nabla c^{pq}_\alpha - c^{pq}_\alpha \omega^n_n \equiv 0, \\ &\nabla c^\alpha_{ab} + c^\alpha_{ab} \omega^o_o \equiv 0, \quad \nabla c^\alpha_{pq} + c^\alpha_{pq} \omega^o_o \equiv 0. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

С помощью тензоров a^{ab}_n, a^{pq}_n (1.13), a^n_{ab}, a^n_{pq} (1.7), $c^{ab}_\alpha, c^{pq}_\alpha$ (4.1), $c^\alpha_{ab}, c^\alpha_{pq}$ (4.2) строим тензоры 2-го порядка:

$$h^a_{\alpha c} = c^{ab}_\alpha a^n_{bc}, \quad h^p_{\alpha t} = c^{pq}_\alpha a^n_{qt}, \quad h^{\alpha c}_a = c^\alpha_{ab} a^{bc}_n, \quad h^{\alpha t}_p = c^\alpha_{pq} a^{qt}_n; \qquad (4.4)$$

$$h^\beta_\alpha = h^a_{\alpha c} h^{\beta c}_a, \quad H^\beta_\alpha = h^p_{\alpha t} h^{\beta t}_p, \quad h_{\alpha\beta} = h^a_{\alpha c} h^c_{\beta a}, \quad H_{\alpha\beta} = h^p_{\alpha t} h^t_{\beta p}, \qquad (4.5)$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} &\nabla h^{a}_{\alpha c} + h^{a}_{\alpha c}\,\omega^{o}_{o} \equiv 0, \quad \nabla h^{p}_{\alpha t} + h^{p}_{\alpha t}\,\omega^{o}_{o} \equiv 0, \\ &\nabla h^{\alpha c}_{a} - h^{\alpha c}_{a}\,\omega^{n}_{n} \equiv 0, \quad \nabla h^{\alpha t}_{p} - h^{\alpha t}_{p}\,\omega^{n}_{n} \equiv 0; \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} &\nabla h^{\beta}_{\alpha} - h^{\beta}_{\alpha}(\omega^{n}_{n} - \omega^{o}_{o}) \equiv 0, \quad \nabla H^{\beta}_{\alpha} - H^{\beta}_{\alpha}(\omega^{n}_{n} - \omega^{o}_{o}) \equiv 0, \\ &\nabla h_{\alpha\beta} + 2h_{\alpha\beta}\omega^{o}_{o} \equiv 0, \qquad \nabla H_{\alpha\beta} + 2H_{\alpha\beta}\omega^{o}_{o} \equiv 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Свертывая тензоры h^{β}_{α} и H^{β}_{α} (4.5) по α и β, получим относительные инварианты 2-го порядка (основные инварианты 2-го порядка):

$$\begin{aligned} &h_{o} = h^{\alpha}_{\alpha}, \qquad dh_{o} - h_{o}(\omega^{n}_{n} - \omega^{o}_{o}) \equiv 0, \\ &H_{o} = H^{\alpha}_{\alpha}, \quad dH_{o} - H_{o}(\omega^{n}_{n} - \omega^{o}_{o}) \equiv 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Будем считать, что тензоры h^{β}_{α} и $h_{\alpha\beta}$, H^{β}_{α} и $H_{\alpha\beta}$ (4.7) невырожденные и $h_o \neq 0$, $H_o \neq 0$. Тогда для тензоров h^{β}_{α} и H^{β}_{α} можно построить обратные им тензоры $\widehat{h}^{\beta}_{\alpha}$ и $\widehat{H}^{\beta}_{\alpha}$:

$$\begin{aligned} &\widehat{h}^{\beta}_{\gamma}h^{\gamma}_{\alpha} = \widehat{h}^{\gamma}_{\alpha}h^{\beta}_{\gamma} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \qquad \widehat{H}^{\beta}_{\gamma}H^{\gamma}_{\alpha} = \widehat{H}^{\gamma}_{\alpha}H^{\beta}_{\gamma} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \\ &\nabla\widehat{h}^{\beta}_{\alpha} + \widehat{h}^{\beta}_{\alpha}(\omega^{n}_{n} - \omega^{o}_{o}) \equiv 0, \quad \nabla\widehat{H}^{\beta}_{\alpha} + \widehat{H}^{\beta}_{\alpha}(\omega^{n}_{n} - \omega^{o}_{o}) \equiv 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Теперь, учитывая (4.6, 4.7, 4.9) во второй дифференциальной окрестности элемента гиперполосы ${}^{s}H_{m}$, можно построить симметрические тензоры 2-го порядка $L_{\alpha\beta}$ и $\widehat{L}_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} &L_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\widehat{h}^{\gamma}_{\alpha}h_{\gamma\beta} + \widehat{h}^{\gamma}_{\beta}h_{\gamma\alpha}), \quad \nabla L_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta}(\omega^{o}_{o} + \omega^{n}_{n}) \equiv 0, \\ &\widehat{L}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\widehat{H}^{\gamma}_{\alpha}H_{\gamma\beta} + \widehat{H}^{\gamma}_{\beta}H_{\gamma\alpha}), \quad \nabla\widehat{L}_{\alpha\beta} + \widehat{L}_{\alpha\beta}(\omega^{o}_{o} + \omega^{n}_{n}) \equiv 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

$L_{o} = \det\left\| L_{\alpha\beta} \right\|$ и $\widehat{L}_{o} = \det\left\| \widehat{L}_{\alpha\beta} \right\|$ — относительные инварианты гиперполосы ${}^{s}H_{m}$:

$$\begin{aligned} &d\ln L_o - 2\omega_\alpha^\alpha + (n-m-1)(\omega_o^o + \omega_n^n) \equiv 0, \\ &d\ln \widehat{L}_o - 2\omega_\alpha^\alpha + (n-m-1)(\omega_o^o + \omega_n^n) \equiv 0. \end{aligned} \qquad (4.11)$$

Для тензоров 2-го порядка $L_{\alpha\beta}$ и $\widehat{L}_{\alpha\beta}$ (4.10) (в общем случае они невырожденные) можно ввести в рассмотрение обратные им тензоры 2-го порядка $L^{\beta\gamma}$ и $\widehat{L}^{\beta\gamma}$:

$$L_{\alpha\beta} L^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma, \quad \nabla L^{\beta\gamma} - L^{\beta\gamma}(\omega_o^o + \omega_n^n) \equiv 0,$$

$$\widehat{L}_{\alpha\beta} \widehat{L}^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma, \quad \nabla \widehat{L}^{\beta\gamma} - \widehat{L}^{\beta\gamma}(\omega_o^o + \omega_n^n) \equiv 0.$$

Введем в рассмотрение системы величин [5; 6]:

$$\begin{aligned} &h_\alpha = -(L_{\alpha\beta}\Lambda_n^\beta + \Lambda_\alpha^o), \quad \nabla h_\alpha + h_\alpha \omega_o^o - L_{\alpha\beta}\omega_n^\beta + \omega_\alpha^o \equiv 0, \\ &H_\alpha = -(\widehat{L}_{\alpha\beta}\lambda_n^\beta + \lambda_\alpha^o), \quad \nabla H_\alpha + H_\alpha \omega_o^o - \widehat{L}_{\alpha\beta}\omega_n^\beta + \omega_\alpha^o \equiv 0. \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Из уравнений (4.10), (4.12) следует, что величины $\{L_{\alpha\beta}, h_\alpha\}$, $\{\widehat{L}_{\alpha\beta}, H_\alpha\}$ образуют геометрические объекты 2-го порядка — квазитензоры 2-го порядка гиперполосы ${}^sH_m$.

Аналогичное строение имеют квазитензоры 2-го порядка h^α и H^α:

$$h^\alpha = -(L^{\alpha\beta}\Lambda_\beta^o + \Lambda_n^\alpha), \quad \nabla h^\alpha + h^\alpha \omega_n^n - L^{\alpha\beta}\omega_\beta^o + \omega_n^\alpha \equiv 0,$$

$$H^\alpha = -(\widehat{L}^{\alpha\beta}\lambda_\beta^o + \lambda_n^\alpha), \quad \nabla H^\alpha + H^\alpha \omega_n^n - \widehat{L}^{\alpha\beta}\omega_\beta^o + \omega_n^\alpha \equiv 0,$$

причем

$$h_\alpha = L_{\alpha\beta} h^\beta, \; H_\alpha = \widehat{L}_{\alpha\beta} H^\beta, \; h^\alpha = L^{\alpha\beta} \mathrm{h}_\beta, \; H^\alpha = \widehat{L}^{\alpha\beta} H_\beta.$$

Построим поле симметричного дважды ковариантного тензора B_{ij} [2]:

$$B_{ij} = a_n^{uw} a_n^{mk} D_{ium}^n D_{jwk}^n, \; \nabla B_{ij} + 2B_{ij}\omega_o^o \equiv 0. \qquad (4.13)$$

Дискриминант $B_o = \left| B_{ij} \right|$ тензора B_{ij} (4.13) назовем *дополнительным дискриминантом 2-го порядка гиперполосы* ${}^sH_m$ ($B_o \neq 0$).

Рассмотрим обратный тензор B^{ij} для тензора B_{ij}:

$$B_{ij} B^{jk} = \delta_i^k, \ \nabla B^{ij} - 2B^{ij} \omega_o^o \equiv 0. \tag{4.14}$$

Построим также величины η_i и μ_i [2; 4]:

$$\eta_i = a_n^{uw} a_n^{mk} D_{wki}^n c_{um}^\alpha \Lambda_\alpha^o, \ \mu_i = D_{imu}^n c_\alpha^{mu} \Lambda_n^\alpha, \tag{4.15}$$

дифференциальные уравнения которых имеют вид:

$$\begin{aligned} &\nabla \eta_i + \eta_i (2\omega_o^o - \omega_n^n) - a_n^{uw} a_n^{mk} D_{wki}^n c_{um}^\alpha \omega_\alpha^o \equiv 0, \\ &\nabla \mu_i + \mu_i (2\omega_o^o - \omega_n^n) - D_{imu}^n c_\alpha^{mu} \omega_n^\alpha \equiv 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

При помощи ранее построенных величин 2-го и 3-го порядка построим новые величины 3-го порядка T_o и J_o, $\widehat{T}_o$ и $\widehat{J}_o$:

$$\begin{aligned} &T_o = T - \Lambda_n^\alpha h_\alpha, \quad J_o = J - \lambda_n^\alpha H_\alpha, \\ &\widehat{T}_o = T - \Lambda_\alpha^o h^\alpha, \quad \widehat{J}_o = J - \lambda_\alpha^o H^\alpha, \end{aligned} \tag{4.17}$$

дифференциальные уравнения которых имеют вид:

$$dT_o - T_o(\omega_n^n - \omega_o^o) - 2(t_a \omega_n^a + h_\alpha \omega_n^\alpha - \omega_n^o) \equiv 0,$$

$$dJ_o - J_o(\omega_n^n - \omega_o^o) - 2(t_p \omega_n^p + H_\alpha \omega_n^\alpha - \omega_n^o) \equiv 0,$$

$$d\widehat{T}_o - \widehat{T}_o(\omega_n^n - \omega_o^o) + 2(t^\alpha \omega_\alpha^o - h^\alpha \omega_\alpha^o - \omega_n^o) \equiv 0,$$

$$d\widehat{J}_o - \widehat{J}_o(\omega_n^n - \omega_o^o) + 2(t^p \omega_p^o - H^\alpha \omega_\alpha^o - \omega_n^o) \equiv 0.$$

Наконец, учитывая (4.14 — 4.17), c_i [2], последовательно находим тензоры 3-го порядка:

$$T_i = \eta_i - \mu_i, \quad \nabla T_i + T_i (2\omega_o^o - \omega_n^n) \equiv 0,$$

$$W^i = B^{ij} T_j, \quad \nabla W^i - W^i \omega_n^n \equiv 0,$$

$$\widehat{t}_i = \frac{1}{2} c_i, \quad \nabla \widehat{t}_i + \widehat{t}_i \omega_o^o \equiv 0, \ \widehat{T}^i = a_n^{ij} \widehat{t}_j, \quad \nabla \widehat{T}^i - \widehat{T}^i \omega_n^n \equiv 0.$$

Список литературы

1. *Вагнер В.В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. 8. М., 1950. С. 197—272.

2. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос. Калининград, 1983.

3. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Ч. 1. Калининград, 1980.

4. *Норден А.П., Тимофеев Г.Н.* Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств // Изв. вузов. Математика. 1972. №8. С. 81—89.

5. *Столяров А.В.* Условие квадратичности регулярной гиперполосы // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 9. Калининград, 1978. С. 93—101.

6. *Попов Ю.И., Столяров А.В.* Специальные классы регулярных гиперполос. Калининград, 1992.

S. Volkova, Yu. Popov

FIELDS OF FUNDAMENTAL AND EQUIPPED OBJECTS
OF COEQUIPPED HYPERSTRIP OF PROJECTIVE SPACE

The giving normally s-coequipped hyperstrip ${}^sH_m$ in a frame of 1st order R_1 is given and the existence theorem of hyperstrip ${}^sH_m$ is proved. The fields of Norden — Timofeev's planes [4] and fields of geometrical objects in differential neighborhoods of 2nd and 3rd order of hyperstrip ${}^sH_m$ are constructed.

УДК 514.75

Н.В. Виноградова, М.В. Кретов

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

КОМПЛЕКСЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПАРАБОЛОИДОВ

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются комплексы (трехпараметрические семейства) эллиптических параболоидов. Показано, что такие комплексы существуют. Найдены геометрические свойства исследуемых многообразий.

Ключевые слова: эллиптический параболоид, аффинное пространство, комплекс, многообразие, репер,